بسم الله الرحمن الرحيم

المصفوفات Matrices

المصفوفة (Matrix) : هي مجموعة من الأعداد أو الأرقام مرتبة في صفوف (m) وأعمدة (n) على شكل مستطيل أو مربع وموضوعة داخل قوسين {} أو [] أو () ، ويطلق على هذه الأرقام والرموز اسم عناصر المصفوفة.

مثال: المصفوفة A السابقة ذات درجة (m.n) حيث إن m تشير إلى عدد الصفوف، n تشير إلى عدد الأعمدة.
إن الرمز a_{ij} يشير إلى العنصر الموجود بالصف (i) والعمود (j).

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال: المصفوفة التالية هي من حجم (3x4) وتحتوي على مجموعة من الأرقام كالأتي:-

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -\sqrt{2} & 6 \\ 4 & 1 & 12 & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 100 \end{bmatrix}$$

- ❖ يرمز للمصفوفة بأحرف كبيرة مثل *A*، *B*، *C*، ... .
- ❖ نرمز لعنصر المصفوفة *A* الواقع في الصف *i* والعمود *j* بالرمز a_{ij}.

درجة المصفوفة (سعة المصفوفة) : نقول إن درجة (سعة) (حجم) المصفوفة، (m×n) ، إذا كان عدد صفوفها m وعدد أعمدتها n.

<u>بعض أنواع المصفوفات</u> :

١. المصفوفة المربعة Square Matrix : هي مصفوفة عدد أعمدتها = عدد صفوفها أي (m=n) .
ملاحظة : a_{11} ، a_{22} ، a_{33} ، $a_{mn......}$ تسمى بالعناصر القطرية Diagonal Elements

$$A_{33}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{22}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

٢. المصفوفة القطرية Diagonal Matrix : هي مصفوفة عناصرها غير القطرية = صفر

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad D_{33}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

٣. المصفوفة المستطيلة Rectangular Matrix : هي مصفوفة عدد أعمدتها ≠ عدد صفوفها أي (m≠n) .

$$A_{23}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٤. المصفوفة الواحدية Identity Matrix : مصفوفة قطرية كل عنصر على القطر الرئيسي =١ويرمز لها I_n

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٥. المصفوفة الصفرية (العدمية) : هي مصفوفة جميع عناصرها = صفر ، وتسمى المحايد الجمعي .

$$O_{2x2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B_{4x3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

٦. المتجه الصفي أو الافقي (Row Vector) : مصفوفة درجتها $(1\times n)$ مثل

مثال: $B=\begin{bmatrix}6 & 8 & 4 & 7 & 2\end{bmatrix}$ المصفوفة B هي ذات درجة 1x5.

٧. المتجه العمودي (column Vector) : مصفوفة درجتها $(n\times 1)$ مثل $A_{31}=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$

٨. المعامل العددي (Scalar) : مصفوفة مكونة من عمود واحد وصف واحد $A_{11}=[24]=2$

٩. المصفوفة المثلثية العليا: هي مصفوفة جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي تساوي أصفار.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 9\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

١٠. المصفوفة المثلثية السفلى: هي مصفوفة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي تساوي أصفار .

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 7 & 2 & 0\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

١١. مبدل المصفوفة (منقول المصفوفة) : إذا كانت المصفوفة (A) سعتها $(m\times n)$ فإن منقول المصفوفة يرمز له $\acute{A}$ (A^t) والناتجة من تحويل كل سطر من المصفوفة (A) إلى عمود في المصفوفة $\acute{A}$.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 8\\ 7 & 2 & 10\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix} \qquad \acute{A}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 5\\ 2 & 2 & 5\\ 8 & 10 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 1\\ 2 & 8 & 3\end{bmatrix} \qquad \acute{B}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

١٢. المصفوفة المتماثلة أو المتناظرة Symmetric Matrix : هي مصفوفة مربعة بحيث عناصرها $a_{ji}=a_{ij}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 0 & 1\\ 5 & 8 & 1 & 7\end{bmatrix} \qquad A=\acute{A}$$

مثال ١) حدد درجة (سعة) كل من المصفوفات.

$$\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & -3 & 7\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & \frac{1}{5}\\ 1 & 9\end{bmatrix} \quad [3] \quad \begin{bmatrix}1 & 11 & 4\\ \frac{2}{7} & -1 & \sqrt{3}\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}_{2x1} \quad \begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix}_{2x2} \quad \begin{bmatrix}2 & -3 & 7\end{bmatrix}_{1x3} \quad \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & \frac{1}{5}\\ 1 & 9\end{bmatrix}_{3x2} \quad [3]_{1x1} \quad \begin{bmatrix}1 & 11 & 4\\ \frac{2}{7} & -1 & \sqrt{3}\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}_{3x3}$$

مثال ٢) باعتبار المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 8 & 5 & -3 \\ 11 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}_{3x2}$

عين قيم العناصر , b_{33} , b_{22} , b_{31} , b_{13} , a_{32} , a_{21} , a_{11} , a_{12}

الحل , $a_{12}=3$ $a_{11}=2$ $a_{21}=0$ $a_{32}=4$ $b_{13}=-1$ $b_{31}=11$ $b_{22}=5$ $b_{33}=o$

وبالمثل نجد

$A_{11} = 2, \quad A_{21} = 0, \quad A_{32} = 4$

$B_{13} = -1, \quad B_{31} = 11, \quad B_{22} = 5, \quad B_{33} = 0$

العمليات على المصفوفات

١) **الجمع والطرح :** يتم إذا كانت المصفوفتين نفس السعة أو الحجم . أي إن: $A_{mxn} \pm B_{mxn}=C_{mxn}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & am.n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad C=A\pm B=\begin{bmatrix} (a_{11}\pm b_{11}) & \cdots & (a_{1n}\pm b_{1n}) \\ (a_{21}\pm b_{21}) & \cdots & (a_{2n}\pm b_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}\pm b_{m1}) & \cdots & (a_{mn}\pm b_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad A+B=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 15 \\ 12 & 4 & 5 \\ 4 & 12 & 5 \end{bmatrix} \quad A\text{-}B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \quad C=A+B=\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 8 & 9 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \quad C=A\text{-}B=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

٢) **ضرب المصفوفات :** لكي نتمكن من ضرب مصفوفتين لابد إن يكون **عدد الأعمدة بالمصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.**

ملاحظة عامة: لضرب متجه أو مصفوفة A × متجه أو مصفوفة B نلاحظ إن

- عدد الأعمدة للمصفوفة A = عدد الصفوف للمصفوفة B يجب أن يساوي .
- سعة أو درجة المصفوفة الناتجة AB تكون الصفوف للمصفوفة A × الأعمدة للمصفوفة B

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}) \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}) & (a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}) \\ (a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}) & (a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}) & (a_{41}b_{13}+a_{42}b_{23}) \\ (a_{51}b_{11}+a_{52}b_{21}) & (a_{51}b_{12}+a_{52}b_{22}) & (a_{51}b_{13}+a_{52}b_{23}) \end{bmatrix}$$

أ. ضرب مصفوفة بعدد

يعرف حاصل ضرب مصفوفة A في عدد حقيقي k بأنه المصفوفة kA الناتجة بضرب جميع عناصر A في العدد k. أي أن عناصر المصفوفة kA تحقق

$$(kA)_{ij} = kA_{ij}$$

مثال : احسب كلا من المصفوفتين $5A$ و $\frac{1}{2}B$ حيث

$$A=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \qquad B=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

الحل :

$$5A=\begin{bmatrix} 5\times 2 \\ 5\times(-4) \\ 5\times 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 6 & \frac{1}{2}\times 7 \\ \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}\times 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب. ضرب متجه صفي في متجه عمودي :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{1x3} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3x1}$$

الحل:

$$A.B=[(2)(2)+(-3)(3)+(7)(1)]_{1x1}=[2]$$

ج. ضرب متجه في مصفوفة :

الحل →

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{1x3} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A.B=[(3)(3)+(1)(2)+(4)(4) \quad (3)(5)+(1)(6)+(4)(8) \quad (3)(4)+(1)(1)+(4)(2)]=[27 \quad 53 \quad 21]_{1x3}$$

د. ضرب مصفوفة في متجه:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3x1}$$

الحل $A.B=\begin{bmatrix} (3)(6)+(5)(1)+(4)(2) \\ (2)(6)+(6)(1)+(1)(2) \\ (4)(6)+(8)(1)+(2)(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 31 \\ 20 \\ 36 \end{bmatrix}_{3x1}$

٥. ضرب مصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\\ 1 & 10\end{bmatrix}_{3x2} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 10 & 4\end{bmatrix}_{2x2} \qquad A.B=\begin{bmatrix}(2)(3)+(5)(10) & (2)(8)+(5)(4)\\ (3)(3)+(4)(10) & (3)(8)+(4)(4)\\ (1)(3)+(10)(10) & (1)(8)+(10)(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56 & 36\\ 49 & 40\\ 103 & 48\end{bmatrix}_{3x2}$$

Determinints المحددات

يقابل كل مصفوفة مربعة ، محدد تتكون عناصره من عناصر المصفوفة الأصلية، ويمكن ايجاد قيم المحدد :

١) المحدد لمصفوفة من الدرجة الأولى $|A|=20$ $\qquad A=[20]$

٢) المحدد لمصفوفة من الدرجة الثانية = الفرق بين حاصل ضرب الأقطار

$$A_{22}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad |A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 10 & 4\end{bmatrix}_{2x2} \qquad |A|=(3)(4)-(8)(10)=-78$$

٣) المحدد لمصفوفة من الدرجة الثالثة : بطريقتين :

أولاً- طريقة المفكوك بالمحيددات أو المصغرات : المحيدد لأي عنصر هو القيمة الناتجة من حذف الصف والعمود الذي يوجد فيه العنصر ورمزه M_{ij}

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix} \qquad M_{12}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$$

معامل المرافق cofactor ($\propto_{ij}$) : هو حاصل ضرب المحيدد M_{ij} بالرقم (-١) مرفوع للأس (i+j)

$$\propto_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

مفكوك العنصر حاصل ضرب معامل المرافق في ذلك العنصر المطلوب إيجاد مفكوكه $\boldsymbol{a_{ij}} \propto_{ij}$

مثال : جد محدد المصفوفة A

بطريقة المفكوك

$$A=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 5 & 8 & 6\\ 3 & 10 & 3\end{bmatrix} \qquad |A|=2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 2 & 10\end{vmatrix}+6(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}6 & 4\\ 3 & 10\end{vmatrix}+3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-152$$

ثانياً- طريقة الرسم أو الاسهم (Sarras Digram) :

$$\left|\begin{matrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \\ 3 & 10 \end{matrix}$$

$$\underbrace{48 \quad 360 \quad 60}_{-468} \qquad\qquad \underbrace{144 \quad 72 \quad 100}_{+316}$$

$$|A| = -468 = 316 = -152$$

خواص المحددات :

١) إذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة صفر فإن محدد المصفوفة صفر

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٢) إذا تساوى عمودان أو صفان من صفوف أو أعمدة المصفوفة فإن محدد المصفوفة صفر

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 3 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

٣) إذا كانت عناصر أحد الصفوف ناتجة عن ضرب صف أخر بثابت فإن محدد المصفوفة صفر

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 18 & 12 & 6 \\ 2 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

٤) إذا كانت مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى بت فإن محدد المصفوفة هو حاصل ضرب القطر الرئيسي

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 \times 2 \times 2 = 8 \qquad |B| = 2 \times 3 \times 8 = 18$$

٥) إذا كانت المصفوفتان A وB لهما نفس السعة فإن $|AB| = |A|.|B|$. $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = (2)(0) - (-1)(3) = 3 \qquad |B| = (3)(1) - (5)(2) = -7 \qquad |A|.|B| = (3)(-7) = -21$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(3)+(-1)(2) & (2)(5)+(-1)(1) \\ (3)(3)+(0)(2) & (3)(5)+(0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = (4)(15) - (9)(9) = 60 - 81 = -21$$

أي إن $|AB| = |A|.|B|$

<u>المصفوفة المرافقة Adjoint of a Matrix</u> : عبارة عن مبدول المصفوفة التي يكون عناصرها معاملات المرافق للمصفوفة الاصلية

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \propto_{11} & \propto_{12} & \propto_{13} \\ \propto_{21} & \propto_{22} & \propto_{23} \\ \propto_{31} & \propto_{32} & \propto_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \acute{B}(B^T) = \begin{bmatrix} \propto_{11} & \propto_{21} & \propto_{31} \\ \propto_{12} & \propto_{22} & \propto_{32} \\ \propto_{13} & \propto_{23} & \propto_{33} \end{bmatrix}$$

يطلق اسم المرافقات α_{ij} على المحيدد M_{ij} بعد إعطائها الإشارة الجبرية الملائمة حسب موقع المحيدد وذلك كالأتي:

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$$

مثال:-أوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة A التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

الحل: أولا: نوجد مبدول أو منقول المصفوفة A.

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

ثانيا: نوجد مرافق كل عناصر منقول المصفوفة 'A.

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix},\alpha_{12}=-1\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix},\alpha_{13}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\alpha_{21}=-1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix},\alpha_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix},\alpha_{23}=-1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\alpha_{31}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix},\alpha_{32}=-1\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix},\alpha_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$

ثالثا : تكون المصفوفة المرافقة كالأتي:

$$\mathrm{Adj}\,A=\begin{bmatrix}10 & -2 & -20\\ -4 & -14 & 8\\ -18 & 11 & -1\end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة: إذا كانت A مصفوفة مربعة وقيمة محددها لا يساوي صفر، فانه يمكن إيجاد معكوس المصفوفة A الذي يشار إليه بالرمز A^{-1} عن طريق قسمة جميع عناصر المصفوفة المرافقة Adj A على محدد المصفوفة A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|}$$

مثال: أوجد معكوس المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: أولا: نوجد قيمة محدد المصفوفة A.

$$1(-1)^{1+1}(5*2-1*0)+2(-1)^{2+1}(3*2-1*4)+4(-1)^{1+3}(3*0-4*5)=10-4-80=-74$$

ثانيا: نوجد محور المصفوفة.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ثالثا: نوجد المصفوفة المرافقة.

$$A^* = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -20 \\ -4 & -14 & 8 \\ -18 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

رابعا: قسمة عناصر المصفوفة المرافقة على محدد المصفوفة A ، فيكون معكوس المصفوفة A كالأتي:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{-74} & \frac{-2}{-74} & \frac{-20}{-74} \\ \frac{-4}{-74} & \frac{-14}{-74} & \frac{8}{-74} \\ \frac{-18}{-74} & \frac{11}{-74} & \frac{-1}{-74} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{74} & \frac{2}{74} & \frac{20}{74} \\ \frac{4}{74} & \frac{14}{74} & -\frac{8}{74} \\ \frac{18}{74} & -\frac{11}{74} & \frac{1}{74} \end{bmatrix}$$

مثال : جد معكوس المصفوفات التالية أ- $B = |6|$ ب- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} \end{bmatrix}$

أ- $|B| = 6$ والمعكوس $B^{-1} = \frac{1}{6}$

ب- أولا - نجد محدد المصفوفة $|A| = (2)(3) - (-1)(5) = 6 + 5 = 11$

ثانياً- نجد منقول المصفوفة وبعدها المصفوفة المرافقة $\acute{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

$$A_{adj} = \begin{vmatrix} (-1)^{1+1}(3) & (-1)^{2+1}(5) \\ (-1)^{1+2}(-1) & (-1)^{2+2}(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{vmatrix}$$

<u>طريقة كرامر Gramer Method</u>

تستخدم المصفوفات لحل المعادلات الخطية . وتستخدم عندما :

- عدد المعادلات = عدد المجاهيل .
- المصفوفة الاصلية غير شاذة المحدد لا يساوي صفر .

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \qquad X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

<u>مثال</u> :

$$X_1 + 3X_2 = 5$$
$$X_1 - 2X_2 = 3$$

الحل :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad |A| = (1)(-2) - (1)(3) = -5$$
$$A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad |A_1| = (5)(-2) - (3)(3) = -19$$
$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad |A_2| = (1)(3) - (1)(5) = -2$$
$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-19}{-5} \qquad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{-5}$$

<u>مثال</u> :

$$\boldsymbol{X_1 + X_2 + X_3 = 7}$$
$$\boldsymbol{X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 16}$$
$$\boldsymbol{X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 22}$$

الحل :

$$|A| = 1^{1+1}[(2)(4) - (3)(3)] + 1^{1+1}[(2)(4) - (3)(3)] + 1^{1+1}[(2)(4) - (3)(3)] = -1$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{(2)(4) - (3)(3)} & \boldsymbol{-1[(1)(4) - (1)(3)]} & \boldsymbol{(1)(3) - (1)(2)} \\ \boldsymbol{-1[(1)(4) - (3)(1)]} & \boldsymbol{(1)(4) - (1)(1)} & \boldsymbol{-1[(1)(3) - (1)(1)]} \\ \boldsymbol{(1)(3) - (2)(1)} & \boldsymbol{-1[(1)(3) - (1)(1)]} & \boldsymbol{(1)(2) - (1)(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{-1} & \frac{-1}{-1} & \frac{1}{-1} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{3}{-1} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{-2}{-1} & \frac{-1}{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix}$$

الاشتقاق The Derivative

لتكن الدالة $y=f_{(x)}$ قابلة للاشتقاق و $\acute{y} = \acute{f}_{(x)}$ هي المشتقة الأولى و $\acute{y} = \acute{f}_{(x)}$ هي المشتقة الثانية

و $y^n = f^n_{(x)}$ هي المشتقة n من المرات .

تعرف **المشتقة** هي نهاية معدل التغير للمتغير التابع Y عند تغير المتغير المستقل X بمقدار طفيف ويرمز للمشتقة

$\frac{dy}{dx}$ أو $\acute{y}$ أو $\acute{f}_{(x)}$ أو $\frac{d_{f(x)}}{d_x}$ للتعبير عن معدل التغير للدالة f(x) للمتغير X .

قواعد الاشتقاق :

١- لتكن $y=f_{(x)}=c$ فإن: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = 0$ **(مشتقة الثابت تساوي صفر)**

مثال: أوجد المشتقة للدالة التالية: $y=f_{(x)}=5$

الحل: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = 0$

٢- لتكن $n\neq 0$ $y=f_{(x)}=x^n$ فإن: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = nX^{n-1}$

مثال: أوجد المشتقة للدالة التالية: $y=f_{(x)}=X^6$ و الدالة $y = f_{(x)} = X^{\frac{3}{2}}$

الحل: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = 6X^5$ ، $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}X^{\frac{1}{2}}$

٣- لتكن $y=f_{(x)}=cx^n$ فإن: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = c.nX^{n-1}$

مثال: أوجد المشتقة للدالة التالية: $y=f_{(x)}=3x^6$

الحل: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = 18X^5$

٤- مشتقة مجموع أو فرق دالتين أو أكثر = مشتقة كل دالة على حد

مثال: أوجد المشتقة للدالة التالية: $y=f_{(x)}=X^7+6X^3+5$

الحل: $\acute{f}_{(X)} = \frac{dy}{dx} = 7X^6 + 18X^5 + 0$

٥- مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × المشتقة الثانية + الدالة الثانية × المشتقة الأولى

مثال : أوجد المشتقة للدالة التالية: $y=f_{(x)}=(X^3+2X)\ (7X2+5X+3)$

الحل: $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = (X^3+2X)(14X+5+0) + (7X^2+5X+3)(3X^2+2)$

٦- مشتقة حاصل قسمة دالتين = (المقام × مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام) مقسوم على المقام تربيع

مثال: أوجد المشتقة للدالة التالية $\boldsymbol{y = \frac{X^5+3X}{X^3-1}}$ الحل : $\boldsymbol{\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{(X^3-1)(5X^4+3)-(X^5+3X)(3X^2)}{(X^3-1)^2}}$

٧- مشتقة الدالة المركبة أو تسمى بدالة الدالة $(y = f_{(u)})$ وهي دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى (u) حيث إن $u=g_{(x)}$ فإن

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}\right)$$

مثال: أوجد المشتقة: $y=f_{(x)}=(2X^2)^{10}$

الحل : $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = 10(2X^2)^9\,(4X) = 40X\,(2X^2)^9$

٨- مشتقة الدالة الضمنية : في بعض الأحيان هناك علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر تسمى بالعلاقات الضمنية لإيجاد مشتقة الدالة الضمنية نستخدم القانون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-fx}{fy} = \frac{\partial fx}{\partial fy}$$

نشتق فقط لـ x مع تثبت y →

نشتق فقط لـ y مع تثبت x →

مثال: أوجد المشتقة: $y^3-Xy+3X^2$

الحل : $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{-fx}{fy} = \frac{-(-y+6x)}{3y^2-x} = \frac{y-6x}{3y^2-x}$

مثال : أوجد المشتقة: $y^4-Xy^2+X^2-7=0$

الحل : $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{-fx}{fy} = \frac{-(-y^2+2x)}{4y^3-2xy} = \frac{y^2-2x}{4y^3-2xy}$

مثال: أوجد المشتقة: $y^3=Xy-3X^2$

الحل : $\acute{f}_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{-fx}{fy} = \frac{-(y-6x)}{3y^2-x} = \frac{y-6x}{3y^2-x}$

الاشتقاق الجزئي : لو فرضنا إن (y) هي دالة للمتغيرين (x و y) أي إن $y=f(x,z)$

فإذا تم تثبيت المتغير (z) فإن مشتقة (y) بالنسبة إلى (z) تسمى بالمشتقة الجزئية ويرمز لها بالرمز التالي $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ إن تثبيت أي متغير يعامل كالحد الثابت في الاشتقاق .

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{dy}{dz}$: $y=xz+z^2+x^3+3$

الحل :

$$\frac{dy}{dz} = x + 2z$$

$$\frac{dy}{dx} = z + 3x^2$$

- إذا طلب منا $\frac{dy^2}{dx^2}$ نقوم باشتقاق ناتج الاشتقاق

<u>التفاضل الكلي :</u> إذا كانت لدينا الدالة $(y = f_{(x,z,w,\dots)})$ فإن التفاضل الكلي للدالة (y) يعرف كالأتي :-

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dz}dz + \frac{dy}{dw}dw + \cdots$$

مثال : أوجد التفاضل الكلي لهذه الدالة $y=4x^2-5xz^3+2z^2$

الحل $dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dz}dz = (8x - 5z^3)dx + (4z - 15z^2)dx$

المشتقات من الدرجات العليا

هي عبارة عن مشتقات لمشتقات أعلى منها درجة أي إن المشتقة الثانية هي عبارة عن مشتقة لمشتقة من الدرجة الأولى والمشتقة من الدرجة الثالثة هي مشتقة لمشتقة من الدرجة الثانية وهكذا وبما إن رمز المشتقة الأولى هو $\frac{dy}{dx}$ فان رمز المشتقة الثانية هو $\frac{d^2y}{dx}$ ورمز المشتقة الثالثة هو $\frac{d^3y}{dx}$ ....الخ

مثال: إذا كانت : $Y=4X^3$ فان مشتقاتها هي:	مثال آخر : أوجد مشتقات الدالة التالية: $Y=6X^4-2X^3+7X^2-3X+12$
الحل: $\frac{dy}{dx}=12x^2$ $\frac{d^2y}{dx^2}=24x$ $\frac{d^3y}{dx^3}=24$ $\frac{d^4y}{dx^4}=0$	$\frac{dy}{dx}=24x^3-6x^2+14x-3$ $\frac{d^2y}{dx^2}=72x^2-12x+14$ $\frac{d^3y}{dx^3}=144x-12$ $\frac{d^4y}{dx^4}=144$ $\frac{d^5y}{dx^5}=0$

مشتقة الدالة الأسية =الدالة نفسها ×مشتقة الأس $\frac{dy}{dx}=e^x.1=e^x$

مثال: أوجد ما يلي :

	المثال	الحـــــل
1	$y=xe^x$	$\frac{dy}{dx}=Xe^x+e^x.1=e^x(X+1)$
2	$y=e^{x^4}$	$\frac{dy}{dx}=e^{x^4}.4X^3$
3	$y=\frac{e^x}{x+1}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{(X+1)(e^x)-(e^x)(1)}{(X+1)^2}$
4	$y=e^{x^3-3x^2}$	$\frac{dy}{dx}=e^{x^3-3x^2}.3x^2-6x$
5	$y=e^{lnx}$	$\frac{dy}{dx}=e^{lnx}.\frac{1}{x}$

أسئلة عن المشتقات

أوجد (fx و fy) أو $\frac{dz}{dx}$ و $\frac{dz}{dy}$

1- $z=3X^2+4y^3+10$

2- $z=(2X+4y)(X^2-3y)$

3- $z=\frac{2X+4y}{X^2-3y}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية

4- $2X^2 - 3y^3 + X^3y - 18$

5- $x^3z^2+y^3+4xyz=0$

أوجد dz للدوال التالية أو أوجد التفاضل الكلي للدوال التالية

6- $z=2X^2y+3y^5X^3$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية

7- $y=u^4+4u^3+4u^2$

$u=x^2+2x$

$y=4xzw+(2X^2 + w^3z^2) + 4z^3$

8- $y=(3X^2 - 2X + 1)^5$

9- $y=\frac{1}{X^2} + 4x^3$

10- $y=\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^3}$

11- $y=\frac{7}{3} - x^{\frac{1}{3}}$

الحل :

1- $\frac{dz}{dx} = 6x$, $\frac{dz}{dy} = 12y^2$

2- $\frac{dz}{dx} = (2x + 4y)(2x) + (x^2 - 3y)(2)$, $\frac{dz}{dy} = (2x + 4y)(-3) + (x^2 - 3y)(4)$

3- $\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2-3y)(2)-(2x+4y)(2x)}{(x^2-3y)^2}$, , $\frac{dz}{dy} = \frac{(x^2-3y)(4)-(2x+4y)(3)}{(x^2-3y)^2}$

4- $\frac{dy}{dx} = \frac{-(4x-y^3+3x^2y)}{-3xy^2+x^3} = \frac{-4x+y^3-3x^2y}{-3xy^2+x^3}$

5- $\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2z^2+4yz)}{3y^2+4xz} = \frac{-3x^2z^2-4yz}{3y^2+4xz}$, $\frac{dy}{dz} = \frac{-(2x^3z+4xy)}{3y^2+4xz} = \frac{-2x^3z-4xy}{3y^2+4xz}$

6- $dz = (4xy + 9y^5x^2)dx + (2x^2 - 15y^4x^3)dy$

7- $\frac{dy}{du} = 4u^3 + 12u^2 + 8u$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

$\frac{dy}{du} = [4u^3 + 12u^2 + 8u][2x+2]$

$\frac{dy}{du} = [4(x^2+2x)^3 + 12(x^2+2x)^2 + 8(x^2+2x)][2x+2]$

8- $\frac{dy}{dx} = 5(3x^2 - 2x^2 + 1)^4(6x - 2)$

9- $y = x^{-2} + 4x^3 \Rightarrow \acute{y} = -2x^{-3} + 12x^2 = \frac{-2}{x^3} + 12x^2$

10- $y=\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^3} = y=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{x^3} = x^{-\frac{1}{2}} - 8x^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} + 24x^{-4}$

11- $y = \frac{7}{3} - x^{\frac{1}{3}}$

$\acute{y} = 0 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

الدالة الأسية

الصيغة الاولى :

الصيغة العامة : $y = e^x$	**مشتقة الدالة الأسية** =الدالة نفسها ×مشتقة الأس
Ex.1 $y = e^{5(x^2+3x)^2}$	$\frac{dy}{dx} = e^{5(x^2+3x)^2}.10(x^2+3x)(2x+3)$
Ex.2 $y = e^{lnx}$	$\frac{dy}{dx} = e^{lnx}.\frac{1}{x}$
Ex.3 $y = e^{\frac{e^x+1}{e^x}}$	$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{e^x+1}{e^x}}.\frac{e^x.e^x-(e^x+1).e^x}{(e^x)^2}$

الصيغة الثانية :

$y = a^u$ **الصيغة العامة** :	**المشتقة** $\frac{dy}{dx}$ = مشتقة الاس * lna * الدالة نفسها = $a^u.lna.\frac{du}{dx}$
حيث إن (a)=عدد حقيقي موجب ، وu=g(x) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـx	
Ex.1 $y = 10^{x^3}$	$\frac{dy}{dx} = 10^{x^3}.ln10.3x^2$

الدالة اللوغارتمية

الصيغة العامة : $y = lnx$	المشتقة $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
الدالة اللوغارتمية	مشتقة الدالة اللوغارتمية = $\frac{1}{\text{الدالةاللوغارتمية}}$×مشتقة الدالة
$y = \text{Ln}(x+c)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+c)}.1 = \frac{1}{(x+c)}$
Ex.1 $y = \text{Ln}(x^4+2x+10)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4+2x+10)}.4x^3+2 = \frac{4x^3+2}{(x^4+2x+10)}$
Ex.2 $y = \frac{\text{Ln}x}{x^2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2.\frac{1}{x} - \text{Ln}x.2x}{(x^2)^2} = \frac{x-2x\text{Ln}x.}{x^4}$
Ex.3 $y = x\text{Ln}(x+1)$	$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{(x+1)} + Ln(x+1).1$
Ex.4 $y = x\text{Ln}x$	$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + Lnx.1 = Lnx$
Ex.5 $y = e^{Lnx} + 9^{3x^2}$	$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + Lnx.1 = Lnx$

الدالة المثلثية

	الدالة	المشتقة
جا	$\sin x$	$\cos x.1$
جتا	$\cos x$	$-\sin x.1$
ظا	$\tan x$	$\sec^2 x.1$
ظتا	$\cot x$	$-\csc^2 x.1$
قا	$\sec x$	$\sec x.\tan x1$
قتا	$\csc x$	$-\csc x \cot x.1$

Ex.	الدالة	المشتقة $\acute{y}$ $\frac{dy}{dx}$
1	$y = \sin(x+1)$	$\acute{y} = \cos(x+1).1$
2	$y = \sin\frac{x}{2}$	$\acute{y} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).\frac{1}{2}$
3	$y = \cos(-2x)$	$\acute{y} = -\sin(-2x)(-2) = 2\sin(-2x)$
4	$y = \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$	$\acute{y} = -\sin(\frac{2\pi x}{3})\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
5	$y = \tan(2-x)$	$\acute{y} = \sec^2(2-x)(-1) = -\sec^2(2-x)$
6	$y = \tan 5(x-1)$	$\acute{y} = \sec^2 5(x-1)5$
7	$y = \sec(2x-1)$	$\acute{y} = \sec(2x-1)\tan(2x-1).2$
8	$y = \sec(x^2+1)$	$\acute{y} = \sec(2x-1)\tan(2x-1).2$
9	$y = \csc(x^2+7x)$	$\acute{y} = -\csc(x^2+7x)\cot(x^2+7x)(2x+7)$
10	$y = \cot(3x+\pi)$	$\acute{y} = -\csc^2(3x+\pi).3$
11	$y = \cot(\frac{1}{x})$	$\acute{y} = -\csc^2(\frac{1}{x}).\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\csc^2(\frac{1}{x})$
12	$y = \sec^2 x - \tan^2 x$	$\acute{y} = 2\sec x.\sec x.\tan x - 2\tan x.\sec^2 x = 2\sec^2 x.\tan x - 2\tan x.\sec^2 x = 0$
13	$y = -\csc^2 x - \cot^2 x$	$\acute{y} = 0$
14	$y = \sin^3 x$	$\acute{y} = 3\sin^2 \cos x$
15	$y = \cos(\sin x)$	$\acute{y} = -\sin(\sin x)\cos x$
16	$y = 1 + x + \sec^2 x$	$\acute{y} = 1 + 2\sec x\ \tan x = 1 + 2\sec^2 x.\tan x$
17	$y = x^2\cos(\frac{1}{x})$	$\acute{y} = x^2(-\sin)\left(\frac{1}{x}\right)(\frac{1}{x^2}) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)(2x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$
18	$y = (\csc x + \cot x)^{-1}$	$-(\csc x + \cot x)^{-2}(-\csc x.\cot x - \csc^2 x) = -(\csc x + \cot x)^{-2}(-\csc x)(\cot x + \csc x)$ $= -\csc x(\csc x + \cot x)^{-1}$
19	$y = \sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$	$\acute{y} = \cos\left(\frac{x-2}{x+3}\right).\left(\frac{(x+3)-(x-2)}{(x+3)^2}\right) = \cos\left(\frac{x-2}{x+3}\right).\left(\frac{5}{(x+3)^2}\right)$
20	$y = (1 - \tan(\frac{1}{x}))^{-2}$	$\acute{y} = -2(1 - \tan(\frac{1}{x}))^{-3}(-\sec^2\frac{x}{2})\left(\frac{1}{2}\right) = \sec^2(\frac{x}{2})(1 - \tan(\frac{1}{x}))^{-3}.$
21	$y = (1 + \cos^2 7x)^3$	$\acute{y} = 3(1 + \cos^2 7x)^2(2\cos 7x)(-\sin 7x.7) = -42(1 + \cos^2 7x)^2\cos 7x\sin 7x.$

الدوال

تكتب الدالة في الحالة العامة كالآتي:- $Y=f(X)$

وتقرأ: Y دالة في X والرمز f يشير إلى نوعية العلاقة التي تربط بين المتغير X والمتغير Y .

<u>الدوال الجبرية:</u> تكون الدوال الجبرية إما خطية أو غير خطية فالدوال الخطية تكون متغيراتها مرفوعة للأس ١ أما إذا كانت مرفوعة لأس اكبر من ١ فتسمى دوال غير خطية فإذا كانت مرفوعة للأس ٢ تسمى دوال تربيعية وإذا كانت مرفوعة للأس ٣ تسمى دوال تكعيبية وهكذا.

الدالة الخطية	الدالة غير الخطية (دالة تربيعية)	الدالة غير الخطية (دالة تكعيبية)
$Y=5X+7$	$Y=-20+3X+2X^2$	$Y=15-2X+6X^2-9X^3$

<u>الدالة الاسية</u>:- هي تلك الدالة التي يكون فيها الأساس رمزا أو عدد ثابتا ، أما الأس فيكون متغيرا وذلك كالأتي:-

$y=e^X$, $y=20^X$

ومن أهم القوانين التي يجب معرفتها بالنسبة للأسس ما يأتي:-

1. $a \times a \times a \times a = a^n$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
4. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. $(a.b)^n = a^n b^n$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

<u>الدوال اللوغارتمية</u>:- يمكن تحويل الدالة الاسية إلى **<u>دالة لوغارتمية</u>** بأخذ لوغاريتم لطرفي الدالة الاسية كالأتي:-

$Y=a^X$

$\therefore \log Y = \log a^X$

ومن أهم خواص الدوال اللوغارتمية ما يلي:-

1. $\log (X.Y)=\log X + \log Y$
2. $\log \left(\frac{X}{Y}\right)=\log X - \log Y$
3. $\log \left(\sqrt[a]{X}\right)= \frac{\log X}{a}$
4. $\log X^n = n \log X$

Integration التكامل

يعرف التكامل بانه عملية عكسية للتفاضل ويرمز له ($\int$) أي إعادة المشتقة إلى دالتها. وهناك قواعد كثيرة للتكامل نأخذ بعض منها هي:

	القاعدة	
1	$\int 1\, dx = x + c$	(تكامل الكمية الثابتة)
2	$\int k\, dx = kx + c$	
3	$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$	(تكامل الدالة المرفوعة إلى قوة) بشرط $(n \neq -1)$
4	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
5	$\int kx^n\, dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	
6	$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = lnx + c$	(تكامل مقلوب الدالة)
7	$\int (ex^a \pm rx^b)dx = \int ex^a\, dx \pm \int rx^b\, dx + c = \frac{ex^{a+1}}{a+1} \pm \frac{rx^{b+1}}{b+1} + c$	(تكامل حاصل جمع أو طرح دالتين أو أكثر)
8	$\int k(a \pm bx^n)dx = k(\int adx \pm \int bx^n dx + c)$	
9	$\int -f(x)\, dx = -\int f(x)\, dx =$	(تكامل الدالة المسبوقة بقيمة سالبة)
10	$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} . \frac{1}{a} + c$	حيث b عدد ثابت
11	$\int (\frac{2x+a}{x^2+ax+b})\, dx = Ln\lvert x^2+ax+b\rvert + c$	(تكامل كسر اعتيادي بسطه مشتقة دالة المقام) =لوغارتم القيمة المطلقة للمقام مضاف إليه ثابت التكامل

أمثلة أوجد تكامل المشتقات التالية واكتب دوالها:

	المشتقات	تكامل المشتقات التالية	دوالها
1	$\frac{dy}{dx}$=1	$\int 1\, dx = x + c$	*Y=x+c*
2	$\frac{dy}{dx}$=*7*	$\int 7\, dx = 7x + c$	*Y=7x+c*
3	$\frac{dy}{dx}$=*x*	$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$	$y = \frac{1}{2}x^2 + c$
4	$\frac{dy}{dx} = x^3$	$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$	$y = \frac{1}{4}x^4 + c$
5	$\frac{dy}{dx} = 8x^3$	$\int 8x^3\, dx = 8\frac{x^4}{4} + c$	$y = 2x^4 + c$
6	$\frac{dy}{dx} = 5x^{-1}$	$5\int x^{-1}dx = 5ln\lvert x\rvert + c$	Y=$5ln\lvert x\rvert + c$
7	$\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 10x^4)$	$\int (2x^3 - 10x^4)dx = \int 2x^3 + \int 10x^4 + c = \frac{2x^4}{4} + \frac{10x^5}{5} + c$	$y = \frac{1}{2}x^4 + 2x^5 + c$
8	$\frac{dy}{dx} = 27(5 - 14x^6)$	$\int 27(5 - 14x^6)dx = 27\left(\int 5 - \int 14x^6 + c\right) = 27\left(5x - \frac{14x^7}{7} + c\right)$	$y = 27(5x - 2x^7 + c)$
9	$\frac{dy}{dx} = -(2x^2)$	$\int -(2x^2)\, dx = -\int (2x^2)\, dx = -2\frac{x^3}{3} + c$	$y = -2\frac{x^3}{3} + c$
10	$\frac{dy}{dx} = (3x+2)^5$	$\int (3x+2)^5\, dx = \frac{(3x+2)^6}{6} . \frac{1}{3} + c$	$y = \frac{(3x+2)^6}{6} . \frac{1}{3} + c$
11	$\frac{dy}{dx} = \frac{10x+15}{x^2+3x+1}$	$\int (\frac{5(2x+3)}{x^2+3x+1})\, dx = Ln\lvert x^2+3x+1\rvert + c$	$y = Ln\lvert x^2+3x+1\rvert + c$

تكامل الدالة اللوغارتمية :

شروطه:

- الدالة كسرية .
- المقدار بالمقام مشتقته موجودة في البسط .
- المقدار بالمقام مرفوع للأس (١) .

	المشتقات	تكامل المشتقات التالية	دوالها
1	$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x+2}$	$\int \frac{2}{x+2}\,dx = 2\int \frac{1}{x+2}\,dx = 2ln\lvert x+2\rvert + c$	$Y=2ln\lvert x+2\rvert + c$
2	$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+x}{x^3+1}$	$\int \frac{x^2+x}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}ln\lvert x^3+1\rvert + c$	$Y=\frac{1}{3}ln\lvert x^3+1\rvert + c$
3	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+6}$	$\int \frac{1}{x+b}\,dx = ln\lvert x+6\rvert + c$	$Y=ln\lvert x+6\rvert + c$
4	$\frac{dy}{dx}=\frac{8x+18}{2x^2-x+10x-5}$	$\int \frac{2(4x+9)}{2x^2-x+10x-5}\,dx = 2ln\lvert 2x^2-x+10x-5\rvert + c$	$Y=2ln\lvert 2x^2-x+10x-5\rvert + c$
5	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2+1}$	$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}ln\lvert x^2+1\rvert + c$	$Y=\frac{1}{2}ln\lvert x^2+1\rvert + c$
6	$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{x-2}$	$\int \frac{6}{x-2}\,dx = 6\int \frac{1}{x-2}\,dx = 6ln\lvert x-2\rvert + c$	$Y=6ln\lvert x-2\rvert + c$
7	$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}$	$\int \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}\,dx = ln\lvert x^3+3x^2\rvert + c$	$Y=ln\lvert x^3+3x^2\rvert + c$
8	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+5}{x^2+5x}$	$\int \frac{2x+5}{x^2+5x}\,dx = ln\lvert x^2+5x\rvert + c$	$Y=ln\lvert x^2+5x\rvert + c$
9	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+5}{x^3+3x^2}$	$\int \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}\,dx = ln\lvert x^3+3x^2\rvert + c$	$Y=ln\lvert x^3+3x^2\rvert + c$
10	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+5}{(x^2+5x)^2}$	$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x)^2}\,dx = \int (x^2+5x)^{-2}(2x+5)\,dx$ $= ln\left\lvert \frac{(x^2+5x)^{-2+1}}{-2+1}\right\rvert + c$	$Y=lnn\left\lvert \frac{(x^2+5x)^{-1}}{-1}\right\rvert + c + c$
11	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{lnx}\,dx = Ln\lvert lnx\rvert + c$	$y = Ln\lvert lnx\rvert + c$

تكامل الدالة الاسية :

	المشتقات	تكامل المشتقات التالية	
		الصيغة الاولى : للدالة الاسية	
1	$\frac{dy}{dx}=e^{x}$	$\int e^{x}\,dx=e^{x}$	تكامل والاشتقاق نفسه $e^{x}=e^{x}$
2	$\frac{dy}{dx}=e^{kx}$	$\int e^{kx}\,dx=\frac{e^{kx}}{k}+c$	K=عدد حقيقي
3	$\frac{dy}{dx}=e^{7x}$	$\int e^{7x}\,dx=\frac{e^{7x}}{7}+c$	$Y=\frac{e^{7x}}{7}+c$
4	$\frac{dy}{dx}=4e^{-2x}$	$\int 4e^{-2x}\,dx=\frac{4e^{-2x}}{-2}+c$	$Y=-2e^{-2x}+c$
5	$\frac{dy}{dx}=xe^{x^2}$	$\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int xe^{x^2}\,2xdx=\frac{e^{x^2}}{2}+c$	$Y=\frac{e^{x^2}}{2}+c$
6	$\frac{dy}{dx}=e^{(3x+5)}$	$\int e^{(3x+5)}\,dx=\frac{e^{(3x+5)}}{3}+c$	$Y=\frac{e^{(3x+5)}}{3}+c$
7	$\frac{dy}{dx}=7e^{-x}+\frac{2}{x}$	$\int(7e^{-x}+\frac{2}{x})\,dx=7\int e^{-x}\,dx+2\int\frac{1}{x}dx=7\frac{e^{-x}}{-1}+2lnx+c$	$Y=7\frac{e^{-x}}{-1}+2lnx+c$
8	$\frac{dy}{dx}=(e^{x}+e^{-x})$	$\int(e^{x}+e^{-x})\,dx=\int e^{x}\,dx+\int e^{-x}dx=e^{x}+\frac{e^{-x}}{-1}+c$	$Y=e^{x}-e^{-x}+c$

		الصيغة الثانية : للدالة الاسية $y=a^{u}$	
1	$\frac{dy}{dx}=a^{kx}$	$\int e^{kx}\,dx=\frac{a^{kx}}{klna}+c$	
2	$\frac{dy}{dx}=8^{(x^2+2x)}(x+1)$	$\int e^{kx}\,dx=\frac{8^{(x^2+2x)}}{2ln8}+c$	$Y=\frac{8^{(x^2+2x)}}{2ln8}+c$
3	$\frac{dy}{dx}=x7^{x^2}$	$\int x7^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int 7^{x^2}2x\,dx=\frac{7^{x^2}}{2ln7}+c$	$Y=\frac{7^{x^2}}{2ln7}+c$
4	$\frac{dy}{dx}=7^{5x}$	$\int 7^{5x}\,dx=\frac{7^{5x}}{5ln7}+c$	$Y=\frac{7^{5x}}{5ln7}+c$
5	$\frac{dy}{dx}=10^{5x}+e^{3x+5}$	$\int(10^{5x}+e^{3x+5})\,dx=\int 10^{5x}\,dx+\int e^{3x+5}\,dx=\frac{10^{5x}}{5ln10}+\frac{e^{3x+5}}{3}+c$	$Y=\frac{10^{5x}}{5ln10}+\frac{e^{3x+5}}{3}+c$
6	$\frac{dy}{dx}=5^{x}$	$\int 5^{x}\,dx=\frac{5^{x}}{ln5}+c$	$Y=\frac{5^{x}}{ln5}+c$

تكامل الدالة المثلثية

المشتقة	الدالة	مثال جد دالة المشتقة	الحل دالة المشتقة
$\int \cos axdx$	$\frac{1}{a}sin\,x+c$	$\int \cos(-2x)dx$	$-\frac{1}{2}sin(-2x)+c$
$\int \sin axdx$	$-\frac{1}{a}\cos x+c$	$\int \sin(7x)dx$	$-\frac{1}{7}cos(7x)+c$
$\int \sec^2 axdx$	$\frac{1}{a}\tan x+c$	$\int 2\sec^2 xdx$	$2\tan x+c$
$\int \csc^2 axdx$	$-\frac{1}{a}\cot x+c$	$\int \csc^2 3xdx$	$-\frac{1}{3}\cot 3x+c$
$\int \sec ax\,.\,tan\,axdx$	$\frac{1}{a}\sec x+c$	$\int \sec(2x)\,.\,tan\,(2x)dx$	$\frac{1}{2}\sec 2x+c$
$\int \csc ax\,.\,cot\,axdx$	$-\frac{1}{a}\csc x+c$	$\int \csc(5x)\,.\,cot\,(5x)dx$	$-\frac{1}{5}\csc(5x)+c$

رسم الدوال بيانيا :

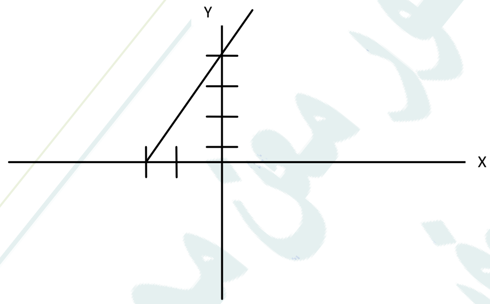
١. رسم الدالة الخطية بيانيا: يمكن رسم الدالة الخطية بيانيا إذا عرف منها نقطتين على الأقل لذا يمكن رسم الدالة الخطية بيانيا عندما نفرض إن قيمة Y=٠ فنجد قيمة X وبعد ذلك نفرض قيمة X=٠ ونجد قيمة Y وبذلك نحصل على نقطتين إحداثياتها (X,0) و(0,Y) وان الخط الواصل بين هاتين النقطتين هو رسم الدالة.

<u>مثال</u>: ارسم بيانيا الدالة الخطية التالية: **Y=2X+4**

<u>الحل</u>: نفرض إن قيمة Y=٠ فان قيمة X تكون : X=-2 0=2X+4

نفرض إن قيمة X=٠ فان قيمة Y تكون : Y=4 Y=2*0+4

وبذلك نحصل على نقطتين هما (-2,0) و (0,4) وبذلك يكون الرسم البياني للدالة كما يلي:



٢. رسم الدالة غير الخطية بيانيا:إن الدالة غير الخطية لا يمكن رسمها عند معرفة نقطتين منها فقط لذا يجب معرفة عدد من النقاط لذا نحدد مدى معين للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X لكي نجد من خلاله القيم المناظرة للمتغيرة Y وبذلك يمكن رسم الدالة بيانيا.

<u>مثال</u>:ارسم بيانيا الدالة غير الخطية $Y=3+2X-X^2$ إذا كانت X تأخذ القيم $-1 \le X \le 3$

<u>الحل</u>: لإيجاد قيم Y المناظرة لقيم X ننشأ الجدول التالي:

٣	٢	١	٠	١-	X
٠	٣	٤	٣	٠	Y

عندما X=-1 $Y=3+2(-1)-(-1)^2=3-2-1=0$

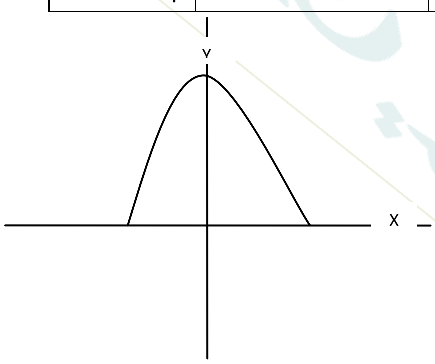
عندما X=0 $Y=3+2*0+0^2=3$

عندما X=1 $Y=3+2*1-1^2=4$

عندما X=2 $Y=3+2*2-2^2=3+4-4=3$

عندما X=3 $Y=3+2*3-3^2=3+6-9=0$

ومن خلال النقاط التي حصلنا عليها يمكن رسم الدالة بيانيا كالآتي:



<u>تمارين</u>: واجب

ارسم بيانيا الدوال التالية:

1. $Y=5X-10$
2. $Y=3X+6$
3. $Y=-2X+8$
4. $Y=X^2-1$ $0 \le X \le 4$
5. $Y=3X^2+2$ $-1 \le X \le 3$
6. $Y= -2X^2+3$ $-2 \le X \le 2$
7. $Y=X^2-2X-2$ $-2 \le X \le 4$

حل تمارين ص٣٢٩ جد $\frac{dy}{dx}$ بالاشتقاق الضمني

Ex.	الدالة	المشتقة $\acute{y}$ $\frac{dy}{dx}$
1	$x^2+x^3=y+y^4$ $x^2+x^3-y-y^4=0$	$\acute{y}=\frac{-(2x+3x^2)}{-1-4y^3}=\frac{2x+3x^2}{1+4y^3}$
2	$x^3+y^3=6xy^4$ $x^3+y^3-6xy^4=0$	$\acute{y}=\frac{-(3x^2-6y^4)}{3y^2-24xy^3}=\frac{6y^4-3x^2}{3y^2-24xy^3}$
3	$x^2+3xy+y^4=5$	$\acute{y}=\frac{-(2x+3y)}{3x+4y^3}$
4	$x^4+y^4=17x$ $x^4+y^4-17x=0$	$\acute{y}=\frac{-(4x^3-17)}{4y^3}$
5	$(1+x^2y)^3+x\sqrt{y}=8$ $(1+x^2y)^3+xy^{\frac{1}{2}}-8=0$	$\acute{y}=\frac{-3(1+x^2y)^2(2xy)+y^{\frac{1}{2}}}{3(1+x^2y)^2(x^2)-\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{y}-6xy(1+x^2y)^2}{3x^2(1+x^2y)^2-\frac{x}{2\sqrt{y}}}$
6	$\sqrt{xy}-3y^2+5x=9$ $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-3y^2+5x-9=0$	$\acute{y}=\frac{-(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+5)}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-6y}=\frac{-(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+5)}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}-6y}$
7	$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=4$ $x^2+y^2-4x^2+4y^2=0$ $5y^2-3x^2=0$	$\acute{y}=\frac{-(-3x)}{10y}=\frac{3x}{10y}$
8	$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}=3$ $xy+x^2-3y^2=0$	$\acute{y}=\frac{-(y+2x)}{x-6y}=\frac{-y-2x}{x-6y}$
9	$(x+y)^{\frac{1}{2}}-(x^2+y)^{\frac{1}{3}}=0$	$\acute{y}=\frac{-\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(x^2+y)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(x^2+y)^{-\frac{2}{3}}}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+y}}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}}$
10	$(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})-9=0$	$\acute{y}=\frac{-(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{-\frac{1}{2}})}{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)+\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(y^{-\frac{1}{2}})}=\frac{-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{y^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{y}}}$

جد المشتقة الثانية

Ex.	الدالة	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
12	$y=5x^3-6x^2+2$	$\frac{dy}{dx}=15x^2-12x$	$\frac{d^2y}{dx^2}=30-12$
13	$y=(x^3+3)^{\frac{1}{2}}+5x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^3+3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)+5$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}(x^3+3)^{-\frac{1}{2}}(6x)-\frac{1}{4}(x^3+3)^{-\frac{3}{2}}(3x^2)(3x^2)$
14	$y=\frac{x+1}{x^2-5}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-5)-2x^2-2x}{(x^2-5)^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x^2-5)^2(-2x-2-[4x(x^2-5)(-(x^2-2x-5)]}{(x^2-5)^4}$
15	$y=(x+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{x}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}}-\frac{-3}{x^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}(x+4)^{-\frac{1}{2}}-\frac{6x}{x^4}=\frac{3}{4\sqrt{x+4}}-\frac{6}{x^3}$

16	$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$	$\frac{2x}{5}-\frac{2}{3}y\frac{dy}{dx}=0 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x}{5y}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{15y-15x\acute{y}}{25y^2}=\frac{15(y-x\frac{3x}{5y})}{25y^2}=\frac{3x(5y^2-3x^2)}{25y^3}$
17	Xy=5 $\quad y=\frac{5}{x}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{x^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-10x}{x^4}=\frac{-10}{x^3}$
18	$x^4-y^4-16=0$	$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x^3}{4y^3}=\frac{-x^3}{y^3}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3y^3x^2+3x^3y^2\frac{dy}{dx}}{y^6}=\frac{-3y^4x^2-3x^6}{y^5}$
19	$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}-2$	$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}-y^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{2x}=\frac{1-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{2x}$

حل تمارين ص ٤١١ جد $\frac{\partial w}{\partial x}=$ و $\frac{\partial w}{\partial y}=$

Ex.	الدالة	$\frac{\partial w}{\partial x}=$	$\frac{\partial w}{\partial y}=$
1	$w=5x^2+3y^2-2xy+11$	$y=10x-2y$	$y=6y-2y$
2	$w=(2x^4+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}(2x^4+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(8x^3+2x)$	$\frac{1}{2}(2x^4+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y)$
3	$w=(x^2-2y^2)^5(x^2+y^2+3)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{x(x^2-2y^2)^5}{\sqrt{x^2+y^2+3}}+10x(x^2-2y^2)^4\sqrt{x^2+y^2+3}$	$\frac{y(x^2-2y^2)^5}{\sqrt{x^2+y^2+3}}+10y(x^2-2y^2)^4\sqrt{x^2+y^2+3}$
4	$w=\frac{x-2y}{3x-2}$	$\frac{(3x-2)-3(x-2y)}{(3x-2)^2}=\frac{(2y-2)}{(3x-2)^2}$	$\frac{-2(3x-2)}{(3x-2)^2}=\frac{-2}{(3x-2)}$
5	$w=xe^{y-2x}$	$-2xe^{y-2x}+e^{y-2x}$	$x.e^{y-2x}$
6	$w=x^2ye^{y-x}+5e^{x^2+3y^2}+6$	$-x^2ye^{y-x}+2xye^{y-x}+10xe^{x^2+3y^2}$	$x^2ye^{y-x}+x^2e^{y-x}+30ye^{x^2+3y^2}$
7	$w=(x-3y)5^{2x}$	$2(x-3y)5^{2x}.ln5.+5^{2x}$	-3.5^{2x}
8	$w=\ln(2x-5y)+3xy$	$\frac{2}{2x-5y}+3y$	$\frac{-5}{2x-5y}+3x$
9	$\mathbf{w=x\ln(y^2+1)+(y+3)\ln(x^2+1)}$	$\mathbf{\ln(y^2+1)+\frac{2x(y+3)}{(x^2+1)}}$	$\mathbf{\frac{2xy}{(y^2+1)}+\ln(y^2+1)}$
10	$\mathbf{w=5x\log_2(y^2+4x^2)}$	$\mathbf{\frac{40x^2}{ln2(y^2+4x^2)}+5\log_2(y^2+4x^2)}$	$\mathbf{\frac{10xy}{ln2(y^2+4x^2)}}$

حل تمارين ص٤١٥ التفاضل الكلي

1	$w=5x^3+2xy^2-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+6y^3+3$	$dw=(15x^2+2y^2-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}})dx+\left(4xy-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+18y^2\right)dy$
2	$w=\mathbf{5x\log_{10}(y^2+1)+y\log_{10}(x^2+1)}$	$dw=\left\{\mathbf{5\log_{10}(y^2+1)+\frac{2xy}{ln10(x^2+1)}}\right\}dx+\left\{\mathbf{\frac{10xy}{ln10(y^2+1)}+\log_{10}(y^2+1)}\right\}dy$
3	$w=xy\ln(\mathbf{x^2+y^2})$	$dw=\left[y\ln(\mathbf{x^2+y^2})+\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)}\right]dx+\left[x\ln(\mathbf{x^2+y^2})+\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)}\right]dy$
4	$w=xe^{2y-z}+ye^{xz}-4xyz$	dw= $[e^{2y-z}+ye^{xz}-4yz]dx+[2xe^{2y-z}+e^{xz}-4xz]dy+[-xe^{2y-z}+ye^{xz}-4xy]dz$
5	$2y5^{xz}+3z5^{xy}-4x5^{yz}$	dw= $[2y5^{xz}\ln5+3z5^{xy}\ln5-(4)5^{yz}]dx+[(2)5^{xz}+3z5^{xy}\ln5-4x5^{yz}\ln5]dy+[2y5^{xz}\ln5+35^{xy}-4x5^{yz}\ln5]dz$

حل تمارين ص٤١٨ جد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

1- $w = x^3 + 3x^2y^2 + 5xy - 2y^3$	
$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 + 5y$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6x + 6y^2$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 12y + 5$	
$\frac{\partial w}{\partial y} = 6yx^2 + 5x$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x^2$

2- $w = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$	
$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2)^2(4x-2y)-4x(2y^2-2x^2-xy)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2(4y-2x)-4y(x^2+y^2)(2y^2-2x^2-xy)}{(x^2+y^2)^4}$	
$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4y(x^2+y^2)-(2y)(2y^2+2x^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

3- $w = xe^{y} + ye^{x} + 3$	
$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{y} + ye^{x}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = ye^{x}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^{y} + e^{x}$	
$\frac{\partial w}{\partial y} = xe^{y} + e^{x}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = xe^{y}$

4- $w = x\ln(x^2 + y^2)$	
$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)} + \ln(x^2 + y^2)$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2)(4x)-(2x^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{(x^2+y^2)}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-(2x^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{(x^2+y^2)}$	
$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2)(4x)-(2x^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{(x^2+y^2)}$

5- $w = xye^{x-2y}$	
$\frac{\partial w}{\partial x} = xy\,e^{x-2y} + ye^{x-2y}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = xy\,e^{x-2y} + ye^{x-2y}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2xy\,e^{x-2y} + e^{x-2y}$	
$\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy\,e^{x-2y} + xe^{x-2y}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4xy\,e^{x-2y} + e^{x-2y}$